ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε σχολικό βιβλίο.
Α2. Βλέπε σχολικό βιβλίο.
Α3. Β
Α4. i. Λάθος
ii. Σωστό
iii. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η εξίσωση (α) γίνεται $(2+\lambda\kappa)x+(1-\lambda\kappa)y+1+3\lambda\kappa=0$. Παρατηρούμε ότι δεν είναι δυνατό να μηδενίζονται ταυτόχρονα οι συντελεστές 2+λκ, 1-λκ.

Β2. λ=0

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι $\lambda=\frac{1}{2}$. Επομένως πρέπει να ισχύει:

$-\frac{2+\lambda\kappa}{1-\lambda\kappa} \overset{\kappa,\lambda\neq 1}{=} -2$ ή $2+\lambda\kappa=2-2\lambda\kappa$ ή $3\lambda\kappa=0$, από την οποία προκύπτει λ=0.

Β3. Η εξίσωση του κύκλου είναι $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$.

Για λ=0 η (α) γίνεται $2x+y+1=0$ που παριστάνει ευθεία η οποία τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $B(0,-1)$. Το κέντρο του κύκλου είναι το $K\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$ και η ακτίνα του $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $\vec{v}=(x,y)$. Τότε είναι:

$|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2}=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$ (1) και $\vec{v}\perp\vec{a} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{a}=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{3}x-\frac{2}{3}y=0 \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$ (2)

Από την σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), παίρνουμε:

$x^2+\frac{5}{4}x^2=1 \Leftrightarrow 9x^2=4 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$ ή $x=\frac{2}{3}$.

- Για $x=-\frac{2}{3}$ και $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$, είναι $\vec{v}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.
- Για $x=\frac{2}{3}$ και $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x=\frac{\sqrt{5}}{3}$, είναι $\vec{v}=\left(\frac{2}{3},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

Γ2. Για το διάνυσμα $\vec{u}$ έχουμε:

$$\vec{u}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=\kappa\left(\frac{\sqrt{5}}{3},-\frac{2}{3}\right)+\lambda\left(-\frac{\sqrt{5}}{3},-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \vec{u}=\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\kappa-\frac{\sqrt{5}}{3}\lambda,-\frac{2}{3}\kappa-\frac{2}{3}\lambda\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}}{3}(\kappa-\lambda),-\frac{2}{3}(\kappa+\lambda)\right)$$

Επειδή $\vec{u}=\left(\sqrt{5},6\right)$, έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{5}}{3}(\kappa-\lambda)=\sqrt{5}\\ -\dfrac{2}{3}(\kappa+\lambda)=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa-\lambda=3\\ \kappa+\lambda=-9\end{cases} \Leftrightarrow (\kappa,\lambda)=(-3,-6).$$

Για κ=-3 και λ=-6 το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι το:
$\vec{u}=-3\vec{a}-6\vec{\beta}=\left(\sqrt{5},6\right)$.

Γ3. Είναι:
$\vec{\alpha}\vec{\beta}=\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta}=\lambda\vec{\beta}\cdot\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda\vec{\beta}^2=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

Επειδή:

- $\vec{\beta}^2=\left|\vec{\beta}\right|^2=\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2=1$ και
- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=-\dfrac{1}{9}$

από τη σχέση $\lambda\vec{\beta}^2=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ βρίσκουμε $\lambda=-\dfrac{1}{9}$. Οπότε:

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}=-\frac{1}{9}\left(-\frac{\sqrt{5}}{3},-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{5}}{27},\frac{2}{27}\right).$$

Γ4. Είναι:

- $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2=\vec{\alpha}=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ ***(1)***
- $\vec{\alpha}_1 // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}_1=\mu\vec{\beta}=\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\mu,-\dfrac{2}{3}\mu\right)$ ***(2)*** με $\mu\in\Re^*$
- $\vec{\alpha}_1\perp\vec{\alpha}_2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}_1\cdot\vec{\alpha}_2=0$ ***(3)***

Από τη σχέση (1), λόγω της σχέσης (2), παίρνουμε:

$$\vec{\alpha}_2=\vec{\alpha}-\vec{\alpha}_1=\left(\frac{\sqrt{5}}{3},-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\mu,-\frac{2}{3}\mu\right)=\left(\frac{\sqrt{5}}{3}(\mu+1),\frac{2}{3}(\mu-1)\right)\ (4)$$

Η σχέση (3) γίνεται:

$$\frac{\sqrt{5}}{3}(\mu+1)\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\mu\right)+\frac{2}{3}(\mu-1)\left(-\frac{2}{3}\mu\right)=0 \Leftrightarrow \frac{5}{9}\left(\mu^2+\mu\right)+\frac{4}{9}\left(\mu^2-\mu\right)=0 \Leftrightarrow 9\mu^2+\mu=0$$

$\Leftrightarrow \mu=0(\alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota)$

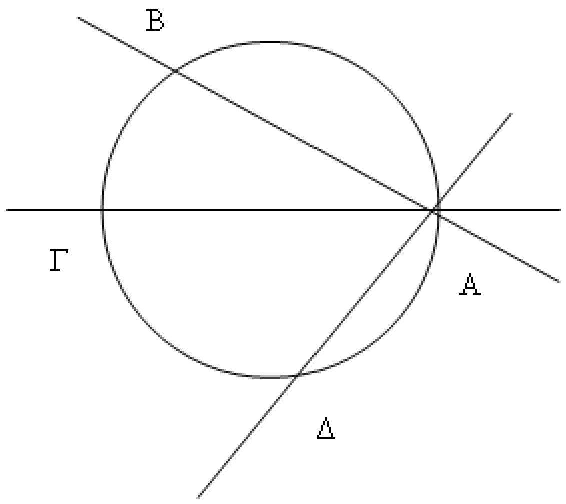
ή $\mu=-\dfrac{1}{9}(\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta})$ *Για* $\mu=-\dfrac{1}{9}$ *από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:*

$$\vec{\alpha}_1=\left(\frac{\sqrt{5}}{27},\frac{2}{27}\right) \text{ και } \alpha_2=\left(\frac{8\sqrt{5}}{27},-\frac{20}{27}\right).$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το σημείο εισόδου των τριών δρόμων είναι το σημείο Α(1,1). Οι συντεταγμένες του σημείου αυτού ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου.
Το πρώτο μέλος της εξίσωσης $(1+2\lambda)x+(\lambda-2)y+1-3\lambda=0$ το μετασχηματίζουμε ως πολυωνυμική εξίσωση του λ: $(2x+y-3)\lambda+x-2y+1=0$. Εφόσον η εξίσωση αυτή αληθεύει για περισσότερες από μια τιμές του λ, πρέπει να ισχύουν $2x+y-3=0$ και $x-2y+1=0$, από τις οποίες προκύπτει $x=1, y=1$.

Δ2. Τα σημεία του περιφερειακού δρόμου από τα οποία εξέρχονται οι τρεις αυτοί δρόμοι είναι τα $B\left(\frac{1}{5},-\frac{7}{5}\right), \Gamma(1,-1), \Delta\left(\frac{31}{25},-\frac{17}{25}\right)$.
Για την εύρεση των σημείων αυτών λύνουμε τα συστήματα:



$$\mathrm{B}:\begin{cases}x^2+y^2=2\\ y=3x-2\end{cases}\Rightarrow B\left(\frac{1}{5},-\frac{7}{5}\right)$$

$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=2\\ x=1\end{cases}\Rightarrow \Gamma(1,-1)$$

$$\Delta:\begin{cases}x^2+y^2=2\\ y=-7x+8\end{cases}\Rightarrow \Delta\left(\frac{31}{25},-\frac{17}{25}\right)$$

Δ3. Οι ζητούμενες αποστάσεις είναι:

$$(\mathrm{AB})=\sqrt{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2+\left(1+\frac{7}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}\sqrt{10}$$

$$(\mathrm{A}\Gamma)=\sqrt{(1-1)^2+(1+1)^2}=2$$

$$(\mathrm{A}\Delta)=\sqrt{\left(1-\frac{31}{25}\right)^2+\left(1+\frac{17}{25}\right)^2}=30\sqrt{2}$$