



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΚΥΡΙΑΚΗ 10 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
 ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ - ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: (3)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) = 0$, σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 9

A2. α) Πότε η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και στο Δ και πότε κάτω στο Δ ;

Μονάδες 3

β) Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;

Μονάδες 3

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
2. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$ τότε τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,-4)$ ανήκουν και τα δυο στη γραφική παράσταση της f .
3. Για την συνεχή στο $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση f ισχύει:

$$\int_a^{\beta} f(x) dx = \int_a^{\beta} f(u) du$$

4. Αν η f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε ισχύει πάντα ότι $\int_a^{\beta} f(x) dx > 0$.
5. Έστω ότι η συνεχή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση f έχει σταθερό πρόσημο σε αυτό, τότε $\int_a^{\beta} f(x) dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f' \left(\frac{x}{e} \right) \leq \ln x \leq f'(x) - 1, \text{ για } x \in (0, +\infty)$$

B1. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \ln x + 1$

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

B2. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1 να δείξετε ότι $f(x) = x \ln x$.

Μονάδες 6

B3. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Μονάδες 6

B4. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περιέχεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , την εφαπτομένη (ε) και τις ευθείες $x=1$ και $x = e^2$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ για την οποία:

- Το σύνολο τιμών στο $[\alpha, \beta]$ είναι το $[-2, 3]$
- $f(\alpha) = 2$
- $f(\beta) = 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 6

Γ2. Αν η f είναι και παραγωγίσιμη στο (α, β) να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της έχει δύο τουλάχιστον οριζόντιες εφαπτομένες.

Μονάδες 6

Γ3. Αν η f' είναι συνεχής στο (α, β) να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)[f'(\xi) + f^{2016}(\xi)] = 0$.

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε:

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} - \frac{1}{2f'(\xi_2)} = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς στο \mathbb{R} συναρτήσεις f, g ώστε:

- $f(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$
- $f^2(x) - f(1)f(2) = g(x), x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1, f(2016) = 2016$
- $\frac{f(f(x))}{f(f(x)+2)} = \frac{f(f(x)+1)}{f(f(x)-1)}, x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι:

Δ1. $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. $f(1)f(2) = f(3)f(4)$.

Μονάδες 5

Δ3. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [1, 2]$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

Μονάδες 5

Δ4. Οι f και g ΔΕΝ είναι αντιστρέψιμες.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Δ5. Αν η f είναι παραγωγίσιμη τότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον εφαπτομένες στη γραφική παράσταση των f και g σε σημεία με την ίδια τετμημένη οι οποίες να είναι παράλληλες.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, τάξη, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιο σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ
ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ**